量　子　力　学

雅　井　恒　丸（名大理）

1. 量子統計が典型的にあらわれている液体は量子液体とよばれ，normal liquid と superfluid に分類される。後者は現象論的には特殊の流体力学に従い，統計力学的には量子統計的凝縮が起っている。したがってその主要な問題は第１に相転移であり，比熱の対数的異常等の静的なものと，輸送係数の異常等の動的なものとをしらべ，かつこの２種のものの内在的関係を明らかにすることである。第２は転移点以下における種々の動的性質の究明であって，ここには inhomogeneity（時間的，空間的）の種々の段階が存在する。

2. 量子統計的凝縮（Q．S．C．）

液体ヘリウムに関連して，理想ボース気体のアインシュタイン凝集が F. London によって着目され，運動量空間における凝縮という形で一般化が示唆された。これは Penrose と Onsager によって，inhomogeneous, interacting system へ拡張された。

$$\int \langle \psi^{+}(x')\,\psi(x)\rangle\, \Psi(x')\,dx' = N_0\,\Psi(x)\ ,\qquad N_0\ \text{巨視的数}$$

によって定義される凝縮体場 Ψ が，漸近形

$$\langle \psi^{+}(x')\,\psi(x)\rangle \xrightarrow[|x-x'|\to\infty]{} \Psi'^{*}(x')\,\Psi'(x)$$

によって定義される場 Ψ' と一致するかどうか，証明を要する。

上の意味ではフエルミ粒子系に Q.S.C. は存在しないが，２フェルミオン原子の集合を考えても判明するように，$\langle \psi^{+}(x'_1)\varphi^{+}(x'_2)\varphi(x_2)\psi(x_1)\rangle$ は巨視的固有値をもち，上記の Q.S.C. が起りうる。B.C.S. 基底状態で $\langle \psi^{+}_{\uparrow}(x'_1)\,\psi_{\downarrow}(x'_2)\,\psi_{\downarrow}(x_2)\,\psi_{\uparrow}(x_1)\rangle$ を計算してみると，(x_1, x_2) と (x'_1, x'_2) の距離を→∞としたとき，$F(x_1-x_2)\,F(x'_1-x'_2)$ に漸近する。ただし u，v を ボゴリ

ューボフの変換係数として，

$$F(r) \equiv \frac{1}{\Omega} \sum_p u_p v_p e^{ip.r}$$

また $N \to \infty$ とともに $F(x'_1 - x'_2)$ が固有函数となり，その際 $\Sigma u_p^2 v_p^2$ が巨視的固有値となる。これを更に拡張し，n体の換元密度行列によってQ.S.C.を定義することはYang が行なった。

以上と異った観点はボゴリューボフの，統計平衡状態の縮退という概念である。ここでは保存則を破る無限小の（強さの定数 ν ）外場，あるいはsource 項をハミルトニアンに加えることにより，対応する対称性が破れる縮退が問題になる。その際

$$\langle A \rangle = \lim_{\nu \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{S_p(A e^{-\beta \mathcal{H}_\nu})}{S_p e^{-\beta \mathcal{H}_\nu}}$$

で定義されるquasi-average の概念が有用である。例えばB.C.S系の場合，粒子数保存則を破る $-\nu \Sigma w(f)(a_f^+ a_{-f}^+ + a_{-f} a_f)$ を source 項とすれば縮退が解け，B.C.S. 状態が得られる。ボース粒子系の場合には，$-\nu\sqrt{V}(a_0 + a_0^+)$ を soure 項にとる。摂動展開をする際にはまずこの縮退を解いておかなくてはならない。こうしていわゆるanomalous line が問題になる。

3. 動 的 性 質

Ψ を N_0 に規格化すると，その運動は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} - U(x,t)\right)\Psi(xt) =$$

$$\frac{1}{N_0}\iint v(x-\bar{x}) \langle \psi^+(x't)\psi^+(\bar{x}t)\psi(\bar{x}t)\psi(xt) \rangle \Psi(x't)\, dx' d\bar{x}$$

に従う。あるいはsource項と化学ポテンシャル項をハミルトニアンに附加すれば

$$(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}-U(xt))\langle\psi(xt)\rangle =$$

$$\int v(x-\bar{x})\langle\psi^+(\bar{x}t)\,\psi(\bar{x}t)\,\psi(xt)\rangle d\bar{x}-\mu\langle\psi(xt)\rangle+\nu(xt)$$

が凝縮の場の方程式になる。フェルミ粒子のQ.S.C.の場合も平行に議論できるので以下省く。

3.-1. 現象論(一様温度,定常)

自由エネルギー

$$\bar{F}=\int\left[F_0(n,T,|\Psi|^2)+n(x)\,U(x)+\frac{1}{2m^*}|\nabla\Psi|^2\right]dx$$

を $\bar{N}=\int n(x)\,dx$ 一定のもとに極小にする条件から

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_0}{\partial n}+U(x)\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{m^*}\right)\cdot|\nabla\Psi|^2/2=\mu=\text{const.}\\[2ex] -\nabla\cdot\left(\dfrac{1}{2m^*}\nabla\Psi\right)+\dfrac{\partial F_0}{\partial|\Psi|^2}\Psi=0\end{cases}$$

が得られる。$\Psi=\alpha e^{im\phi}$ とおき,$\nabla\phi=v_s$ と同定すれば,この速度場で流れる物質密度 $\rho_s=mn_s$ は $m^2\alpha^2/m^*$ となる。実際これは $U(x)=0$ のとき $(\partial F/\partial u)_{n,T}$ に等しく($u\equiv\frac{1}{2}v_s^2$),ランダウの定義に一致する。この点ソビエトでは明確に認識されていない。

3.-2. 二流体論の導出(ボゴリューボフ)

$\zeta(xt)\equiv\nu(xt)\,e^{-im\phi}$ とおき,(n,T,v_s,v_n)で指定される局所平衡を考える。v_nは全運動量に対するラグランジ乗数,inhomogeneity のパラメータμについて展開し,最低次をとったものが理想流体近似である。ただしζはμについて1次だとして扱う。この結果 $\partial\rho s/\partial t+\nabla\cdot\rho s v_n=0$ を導入しているが(ただし証明は一般論ではない),連続の式は単に全質量に関するものである。これは$\langle\psi\rangle$に対する上記方程式の分析が不充分だからである。

3.-3. 弱い相互作用

この場合には

$$\Psi(xt)=\sqrt{n_0}\ e^{-i\mu_0 t}\left\{1+\frac{g}{n_0}\ e^{-i\omega t+ik\cdot x}+\frac{g_1^*}{n_0}\ e^{i\omega^* t-ikx}\right\}$$

とおき，線型近似，Hartree －フォックーゴルコフ型近似をすることによってもっと立入った分析ができる。特にボゴリューボフ・フォノンに対するブラソフ型方程式，n_s に対する連続の方程式が導かれる。また v_s の加速は化学ポテンシャルのハラトニコフ表式の負勾配による。n_s の表式はランダウ表式の拡張である。

3.－4. 局所平衡の成立（Kane-Kadanoff）

$$h(1,1')=-i\langle\psi(1)\rangle\langle\psi^+(1')\rangle\ ,\quad g^>(1,1')=-i\langle\psi(1)\,\psi^+(1')\rangle$$

とおき，$g^>-h$ を Kadanoff-Baym の方式にのせる。任意に最も簡単な衝突項を取入れて Boltzmann 型方程式を導き，それに局所平衡解があることを示した。

3.－5. Time-dependent G.L. 方程式（Abrahams-恒藤）

ゴルコフ方程式の因果型

$$\Delta(1)=i\,g\int d^3r_2\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\left[G_0^<(2,1)G^<(2,1)-G_0^>(2,1)G^>(2,1)\right]\Delta(2)$$

を基礎にして $K\xi_0\ll 1$，$\hbar\omega\ll kT_c$ の条件のもとに変形する。ただし密度を一定とし，熱励起は静止していて，Δ の局所値と外場とに平衡にあるとした。こうして G.L. 型方程式１本に換元されている。

種々の緩和時間の大小をしらべ，各現象の段階を明解に分析することが，未解決の重要問題であると思われる。